

Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil uman
Faza locală - 15 februarie 2018

Clasa a X-a

1. Se consideră expresia $E(x, y) = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{y}} \cdot \sqrt[3]{y \cdot \sqrt{x}}$, pentru orice $x, y \in (0, \infty)$.

a) Arătați că $E(\sqrt{8}, 4) \in \mathbb{Z}$.

b) Determinați cel mai mic număr întreg $n \geq 2$ astfel încât $E(n, n) \in \mathbb{Z}$.

2. a) Arătați că suma $S = \log_5 \frac{1}{2} + \log_5 \frac{2}{3} + \log_5 \frac{3}{4} + \dots + \log_5 \frac{624}{625}$ este număr întreg.

b) Fie $a, b, c > 1$ cu $a + b + c = 2018$.

Demonstrați că $\lg\left(\frac{2018}{a} - 1\right) + \lg\left(\frac{2018}{b} - 1\right) + \lg\left(\frac{2018}{c} - 1\right) \geq 2\lg 3$.

3. a) Calculați $\frac{z^2}{16} + \frac{4}{z}$ știind că z este soluție a ecuației $z^2 - 4z + 16 = 0$.

b) Demonstrați că $z = (1+i)^m \cdot (1-i)^n$, $m, n \in \mathbb{N}$ este număr real dacă și numai dacă $m - n$ se divide cu 4.

4. Capitala statului preroman Dacia s-a numit Sarmizegetusa Regia și se afla în Munții Orăștiei. Aceasta a fost distrusă în anul 106. Pe locul unde aceasta se afla există vestigii istorice cum ar fi Sanctuarele Dacice, înconjurată de un șanț circular cu lungimea de aproximativ 327 m. Determinați lungimea aproximativă a discului circular mărginit de șanț în care se aflau sanctuarele.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil uman-științe sociale, filologie
Faza locală - 15 februarie 2018

Clasa a X-a - barem de corectare

1.a)	<p>Se calculează $E(\sqrt{8}, 4) = \sqrt{\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{4}} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{8}} =$ $\sqrt{\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{4}} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{8}} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{2}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}} =$ $2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = 2^2 = 4 \in \mathbb{Z}.$</p>	1p 2p 1p
1.b)	<p>$E(n, n) = \sqrt{n \cdot \sqrt[3]{n}} \cdot \sqrt[3]{n \cdot \sqrt{n}} =$ $\sqrt{n \cdot \sqrt[3]{n}} \cdot \sqrt[3]{n \cdot \sqrt{n}} = n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{6}} \cdot n^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{6}} = n^{\frac{7}{6}}$ Se obține $n = 2^6 = 64$ pentru care $E(64, 64) = 128.$</p>	1p 1p 1p
2.a)	<p>$S = \log_5 \frac{1}{2} + \log_5 \frac{2}{3} + \log_5 \frac{3}{4} + \dots + \log_5 \frac{624}{625} = \log_5 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{624}{625} =$ $\log_5 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{624}{625} = \log_5 \frac{1}{625} = -4 \in \mathbb{Z}.$</p>	2p 1p
2.b)	<p>$\lg\left(\frac{2018}{a} - 1\right) + \lg\left(\frac{2018}{b} - 1\right) + \lg\left(\frac{2018}{c} - 1\right) = \lg\left(\frac{2018}{a} - 1\right)\left(\frac{2018}{b} - 1\right)\left(\frac{2018}{c} - 1\right) =$ $\lg\left(\frac{2018}{a} - 1\right)\left(\frac{2018}{b} - 1\right)\left(\frac{2018}{c} - 1\right) = \lg \frac{(2018-a)(2018-b)(2018-c)}{abc}$ Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{(2018-a)(2018-b)(2018-c)}{abc} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+c}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq 8$ Folosește inegalitățile $b+c \geq 2\sqrt{bc}, a+c \geq 2\sqrt{ac}, a+b \geq 2\sqrt{ab}.$</p>	1p 1p 1p 1p
3.a)	<p>Din faptul că z este soluție a ecuației $z^2 - 4z + 16 = 0 \Leftrightarrow (z+4)(z^2 - 4z + 16) = 0 \Leftrightarrow z^3 + 64 = 0$ Calcul : $\frac{z^2}{16} + \frac{4}{z} = \frac{z^3 + 64}{16z} = 0.$</p>	2p 1p
3.b)	<p>Folosește că $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}.$ $\bar{z} = (1-i)^m \cdot (1+i)^n, m, n \in \mathbb{N}$ și $(1+i)^m \cdot (1-i)^n = (1-i)^m \cdot (1+i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{m-n} = 1$ Se obține $i^{m-n} = 1 \Leftrightarrow m-n$ este multiplul lui 4.</p>	1p 2p 1p
4.	<p>Lungimea șanțului circular $L = 327m \Leftrightarrow 2\pi R = 327m$ de unde $R \simeq \frac{32700}{2 \cdot 3,14} m$ $R \simeq 52,07 m$ $D \simeq 104 m.$</p>	2p 2p 2p 1p

NOTĂ: Orice soluție corectă se punctează corespunzător.